Algebra delle funzioni continue

Alessio Serraino

March 6, 2016

Teorema: **(Algebra delle funzioni continue)** Siano f, g, due funzioni continue in un certo x_0.

Allora sono continue in x_0 anche le seguenti:

$$\begin{array}{ccc} f & \pm & g \\ f & \cdot & g \\ f & / & g \ \text{ se } g(x_0) \neq 0 \end{array}$$

Dimostrazione:

Dimostriamo la prima. Dobbiamo dimostrare che $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$. Applicando il teorema sul limite della somma si ha che: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x)] \pm \lim\limits_{x \to x_0} [g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$ perchè f, g sono continue in x_0 per ipotesi.

Teorema: **(di cambio di variabile nel limite)** Siano f, g, due funzioni per cui è definita la composta $f \circ g$ almeno definitivamente per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$.

E siano verificate le seguenti ipotesi:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0 \in \mathbb{R}^* \tag{1}$$

$$g(x) \neq t_0 \quad \text{definitivamente} \quad \text{per } x \to x_0 \tag{2}$$

$$\exists \lim_{t \to t_0} f(t) = l \in \mathbb{R}^* \tag{3}$$

Allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t)$

Se f è continua in t_0 la condizione (2) si può omettere.

Dimostrazione:

Sia $\{x_n\}$ una successione tale che $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, allora la *successione* $g(x_n) \to t_0$. Ora considero la *successione* $g(x_n)$, convergente a t_0. Poichè $g(x_n) \neq t_0$, per la definizione successionale di limite si ha che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(g(x_n)) =$

l. Poichè questo limite non dipende da come ho scelto la successione $\{x_n\}$, per la defunzione successionale di limite $\lim_{t \to t_0} f(t) = l$.

Supponiamo che f sia continua in t_0, e che la (2) sia vera o falsa. Risulterebbe in genere che $g(x_n) = t_0$ per qualche valore di n, quindi per la continuità di f, $f(g(x_n)) = f(t_0) = l$. Per tutti questi valori $f(g(x_n))$ è sicuramente compreso fra $l - \varepsilon$ ed $l + \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$. Quindi anche in questo caso il limite vale l.

Teorema: (continuità della funzione composta) Siano f, g, due funzioni per cui è definita la composta $f \circ g$ almeno definitivamente per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$, e sia g continua in x_0, $t_0 = g(x_0)$ ed f continua in t_0. Allora $f \circ g$ è continua in x_0.

La funzione g è continua in x_0, quindi $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = t_0$, quindi $g(x) \to t_0$ per $x \to x_0$.

La funzione f continua in t_0, quindi $\lim_{x \to t_0} f(x) = f(t_0)$, quindi il limite esiste.

Sono state soddisfatte tutte le ipotesi del teorema del cambio di variabile nel limite, quindi:

$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{x \to t_0} f(t) = f(t_0) = f(g(x_0))$, ovvero la funzione composta $f \circ g$ è continua in x_0, che è quanto volevamo dimostrare.

Corollario: Poichè le funzioni elementari sono continue in tutto il loro dominio allora la somma, differenza, prodotto, rapporto e composizione di funzioni elementari è sempre una funzione continua in tutto il dominio. Questa è un'osservazione importante, perchè ci permette di concludere che anche funzioni complicate, come per esempio $x^3 \cdot e^{\sqrt{\sin^2 x + \log x}}$ sono continue in tutto il loro dominio semplicemenete guardando la funzione. Se questo tipo di funzioni hanno delle discontinuità sono da ricercarsi in punti fuori dal loro dominio. Ciò non è vero per *tutte* le funzioni, una funzione definita per casi, per esempio, può avere punti di discontinutià anche interni al dominio.