Teoremi sull'algebra dei limiti

Alessio Serraino

March 6, 2016

Teorema: (algebra dei limiti) Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni convergenti rispettivamente ad a e b. Allora valgono le seguenti formule:

$$\lim_{x\to+\infty}(a_n+b_n)=a+b \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(a_n-b_n)=a-b \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b \tag{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_n^{b_n}\right)=a^b \tag{5}$$

La (4) vale solo se $b_n\neq 0$ e $b\neq 0$.
Dimostrazioni:

- Dimostriamo la (1).

Per la definizione di limite, se il limite vale $a+b$ allora si verifica che $\forall\varepsilon>0$ $|a_n+b_n-a-b|<\varepsilon$ definitivamente. Applichiamo la disugualianza triangolare ed otteniamo: $|a_n-a+b_n-b|\leq|a_n-a|+|b_n-b|<2\varepsilon$ per ipotesi (in quanto $a_n\to a$, $b_n\to b$). Per l'arbitrarietà di ε segue che $|a_n+b_n-a-b|$ può diventare arbitrariamente piccolo, ovvero la tesi.

- La dimostrazione per la(2) è analoga alla precedente, quindi la omettiamo.

- Dimostriamo la (3).

Ragioniamo come per la somma.

Consideriamo $|a_n\cdot b_n-a\cdot b| = |a_nb_n-a_nb+a_nb-ab| \leq |a_nb_n-a_nb|+|a_nb-ab|=|a_n|\cdot|b_n-b|+|b|\cdot|a_n-a|$.

Osserivamo che $a_n\to a$, quindi a_n è definitivamente minore di $a+\varepsilon$, comunque scelgo $\varepsilon>0$. Quindi eseguo una maggiorazione:

$|a_n|\cdot|b_n-b|+|b|\cdot|a_n-a|<|a+\varepsilon|\cdot|b_n-b|+|b|\cdot|a_n-a|\leq a\cdot\varepsilon+\varepsilon^2+b\cdot\varepsilon<\varepsilon\cdot(a\cdot b)<\varepsilon\cdot const.$ Dall'arbitrarietà di ε segue che:

$\forall\varepsilon>0$ $|a_n\cdot b_n-a\cdot b|<\varepsilon$, il limite quindi vale ab, ovvero la tesi.

- Dumostriamo la (4).

Ragioniamo come per il prodotto, costruendo delle minorazioni.

Consideriamo $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n \cdot b - b_n \cdot a}{b_n \cdot b}\right| = \frac{|(a_n b - a_n b_n) + (a_n b_n - b_n a)|}{|b_n b|} \leq \frac{|a_n(b-b_n)| + |b_n(a_n - a)|}{|b_n b|}$.

A questo punto sfruttiamo il fatto che $a_n \to a$, $b_n \to b$, ovvero $a_n < a + \varepsilon$, $b_n < b + \varepsilon$ definitivamente, e scriviamo la maggiorazione
$\frac{|a_n(b-b_n)| + |b_n(a_n - a)|}{|b_n b|} \leq \frac{|a+\varepsilon| \cdot |b_n - b| + |b+\varepsilon| \cdot |a_n - a|}{|b_n b|}$ definitivamente.

Infine, $b_n > b - \varepsilon$ definitivamente, quindi
$\frac{|a+\varepsilon| \cdot |b_n - b| + |b+\varepsilon| \cdot |a_n - a|}{|b_n b|} \leq \frac{|a+\varepsilon| \cdot |b_n - b| + |b+\varepsilon| \cdot |a_n - a|}{|b| \cdot |b-\varepsilon|}$. Se $b \neq 0$ il denominatore non si annulla definitivamente, mentre il numeratore diventa più piccolo di qualsiasi costante positiva, infatti $a+\varepsilon$ e $b+\varepsilon$ sono costanti, moltiplicate per $|b_n - b|$, $|a_n - a|$, che per ipotesi tendono a 0. Ripercorrendo la catena di disuguaglianze si ha che $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$, comunque scegliamo $\varepsilon > 0$, quindi per la definizione di limite il limite cercato vale $\frac{a}{b}$, ovvero la tesi.