# Criterio del confronto

Alessio Serraino

March 6, 2016

**Teorema:** **(del confronto)** Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni a termini definitivamente positivi, e tali che valga definitivamente:

$$a_n \leq b_n$$

Allora se $\sum a_n$ diverge anche $\sum b_n$ diverge, se $\sum b_n$converge allora anche $\sum a_n$ converge

**Dimostrazione:**

Consideriamo la successione delle somme parziali $s_n$, somma di $a$, $s_n^*$, somma parziale di $b$

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Sommiamo le disugualianze $a_n \leq b_n$ membro a membro ed otteniamo che $s_n \leq s_n^*$.

La successione è a termini positivi, quindi la successione delle somme parziali è monotona crescente. Supponiamo che $\sum b_n$ converge. Allora $s_n^* \in \mathbb{R}$ per ipotesi. Quindi la successione $\{s_n\}$ è limitata. Per il teorema di monotonia $\{s_n\}$ converge, dimostrando il primo punto.

Dimostriamo il secondo: $\{a_n\}$ diverge per ipotesi, quindi $s_n \to +\infty$. $s_n^*$, per confronto tende a $+\infty$, ovvero $\{b_n\}$ diverge, dimostrando anche il secondo punto.