Continuità della funzione $\sin(x)$

Alessio Serraino

March 6, 2016

<u>**Teorema:**</u> La funzione $\sin(x)$ è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Dimostrazione:

Dimostriamo prima di tutto che le funzioni $\sin(x)$, e $\cos(x)$ sono continue nel punto $x = 0$.

- Calcoliamo quindi $\lim_{x \to 0} \sin(x)$, se questo limite vale 1, poichè $\sin(0) = 0$ allora $\sin(x)$ è continua in 0.

La funzione $\sin(x)$ è dispari, quindi analizziamo solo il caso $x > 0$, nel caso $x < 0$ il limite sarà lo stesso in valore assoluto ma di segno opposto.

Sfruttiamo la disugualianza $\sin(x) \leq x$, valida $\forall x \in \mathbb{R}\colon x > 0$, inoltre $0 < \sin(x)$ almeno definitivamente per $x \to 0^+$, in quanto x è definitivamente nel primo quadrante, e nel primo quadrante $\sin(x) \geq 0$.

Quindi ho: $0 \leq \sin(x) \leq x$. Il primo è una costante, l'ultimo tende a 0, quindi per il teorema del confronto anche $\sin(x) \to 0$. Per $x \to 0^-$ si avrà lo stesso risultato, ovvero la funzione $\sin(x)$ è continua nel punto $x = 0$.

- Calcoliamo ora $\lim_{x \to 0} \cos(x)$, se questo limite vale 1, poichè $\cos(0) = 1$, allora concluderemo che $\cos(x)$ è continua in 0.

Osserviamo che anche la funzione $\cos(x)$ ha una simmetria: è pari. Quindi calcoleremo solo il limete nel caso $x > 0$, nell'altro caso il limite sarà lo stesso.

$\cos(x) \leq 1$, basta costruire una circonferenza trigonometrica per rendersene conto.

Inoltre $\cos(x) + \sin(x) \geq 1$ se x è nel primo quadrante, poichè $\sin(x)$e $\cos(x)$ sono i cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa 1.

Quindi $\cos(x) \geq 1 - \sin(x)$, ovvero $1 - \sin(x) \geq \cos(x) \geq 1$. Il primo membro tende a 1, perchè abbiamo dimostrato che $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$, il secondo tende a 1 perchè è costante, quindi per il teorema del confronto anche $\cos(x)$ tende a 1. Ma 1 è proprio $\cos(0)$, quindi $\cos(x)$ è continua in $x = 0$.

Riscriviamo la definizione di continuità in una forma equivalente: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} |f(x_0 + h) - f(x_0)| = 0$.

- Consideriamo ora un generico punto x_0 nel dominio della funzione $\sin(x)$, e calcoliamo $\lim_{h \to 0} |\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)|$, se questo limite viene 0, allora il teorema è dimostrato.

$|\sin(x_0+h)-\sin(x_0)| = |\sin(x_0)\cos(h)+\sin(h)\cos(x_0)-\sin(x_0)| \leq |\sin(x_0)\cdot(\cos(h)-1)| + |\cos(x_0)\sin(h)|$

Poichè $\lim_{x\to 0}[\cos(x)-1] = 0$, $\lim_{x\to 0}[\sin(x)] = 0$, sia il primo che il secondo termine diventano infinitamente piccoli quando $h \to 0$ ($\sin(x_0)$ e $\cos(x_0)$ sono delle costanti). Quindi $\forall\varepsilon > 0$ $|\sin(x_0+h)-\sin(x_0)| < \varepsilon$. Quindi si conclude che $\lim_{h\to 0}|\sin(x_0+h)-\sin(x_0)| = 0$, che è quanto volevamo dimostrare.