Teorema di de l'Hospital

Alessio Serraino

March 6, 2016

Teorema: (di de l'Hospital): Siano f, g, due funzioni derivabili una volta in (a, b),

sia $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0 \quad$ *oppure* $\pm\infty$,

ed esista $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$.

Allora $\exists \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Dimostrazione (Nel caso particolare in cui $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$)

Sia $\{x_n\}$ una successione convergente ad a^+, con $x_n \in (a, b)$.

Se g o f non sono definite in a le prolungo per continuità in a, ponendo $f(a) = g(a) = 0$. Se sono definite, poichè sono continue per ipotesi ed il limite è 0 per ipotesi, allora anche il valore della funzione deve essere 0. In ogni caso si verifica $f(a) = g(a) = 0$.

Sia $h(x) = f(x_n) g(x) - g(x_n) f(x)$. h è derivabile in $[a, x_n]$, e $h'(x) = f(x_n) g'(x) - g(x_n) f'(x)$

$h(x)$ verifica tutte le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo (a, x_n), quindi

$$\exists t_n \in (a, x_n) : h'(t_n) = \frac{h(x_n) - h(a)}{x_n - a}$$

Ma $h(a) = h(x_n) = 0$, quindi $\exists t_n \in (a, x_n) : h'(t_n) = 0$. Osserviamo che l'espressione è vera per ogni x_n (quindi per ogni x_n esiste un t_n).

$$f(x_n) g'(t_n) - g(x_n) f'(t_n) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$$

Considero ora le *successioni* $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ e $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$. Per l'ugualianza posso scrivere $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \geq \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \geq \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}$. La prima e l'ultima espressione della disugualianza tendono entrambe a l per ipotesi (in quanto se la *funzione* $w(z) \to z^*$ per $z \to z_0$ allora ogni *successione* $w(z_n) \to z^*$se la successione $z_n \to z_0$).

Quindi per il teorema del confronto anche la *successione* $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l$. Questo limite non dipende dal modo in cui vengono scelti gli x_n, quindi è uguale anche al limite della *funzione* $\frac{f(x)}{g(x)}$, ovvero $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Che è quanto volevamo dimostrare.

Si osservi che se non eiste il limite $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*$ non si può concludere che non esiste $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. La dimostrazione infatti basa il suo risultato sull'esistenza del limite delle derivate (che infatti è stato aggiunto fra le ipotesi). Un esempio di questo può essere la funzione:

$f(x) = \frac{sin(x)+x}{cos(x)+x}$. Calcoliamo il limite per $x \to +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{sin(x)+x}{cos(x)+x} = 1$, per la gerarchia degli infiniti. Quindi il limite esiste. Tuttavia si noti che il limite delle derivate $\lim_{x \to +\infty} \frac{cos(x)+1}{-sin(x)+1}$ non esiste.