Derivata della funzione composta

Alessio Serraino

March 6, 2016

<u>**Teorema:**</u> **(Regola della catena)** Siano f, g due funzioni a valori reali per cui la funzione composta, $f \circ g$, sia definita, almeno definitivamente, per $x \to x_0$.

Sia inoltre g continua in x_0, e detto $y_0 = g(x_0)$, sia f continua in y_0.

Allora $f \circ g$ è derivabile in x_0, e vale: $(f \circ g)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Dimostrazione:

Consideriamo, per h infinitesimo, un incremento di $f \circ g$

$$(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) \tag{1}$$

La funzione g è derivabile in x_0 per ipotesi, quindi per il teorema di linearizzazione, $g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(x_0) \cdot h + \varepsilon(h) = k$, con h infinitesimo. Osserviamo che per $h \to 0$ il primo membro tende a 0, per la continuità di g, ne segue che anche $k \to 0$. E sostituiamo nella l'espressione ottenuta nella (1).

$$f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0)) = f(y_0 + k) - f(y_0) \tag{2}$$

La funzione f è derivabile in y_0 per ipotesi, quindi per il teorema di linearizzazione $f(y_0 + k) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot k + \delta(k)$, con k infinitesimo. Sostituiamo nella (2) il risultato ottenuto, otteniamo:

$$f(y_0 + k) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot k + \delta(k) \tag{3}$$

Calcoliamo ora il limite del rapporto incrementale di $f \circ g$, che è per definizione la derivata. Inoltre sfruttando la catena di ugualianze scritte fin ora riscriviamo il limite in una forma più semplice:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(y_0) \cdot k + \delta(k)}{h} \tag{4}$$

Sostituiamo ora y_0 ed k

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(y_0) \cdot k + \delta(k)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(g(x_0)) \cdot (g'(x_0) \cdot h + \varepsilon(h)) + \delta(k)}{h} \tag{5}$$

Spezziamo la frazione, ed applichiamo il teorema sul limite della somma

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(g\left(x_0\right)\right)\cdot g'\left(x_0\right)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}}+\lim_{h\to 0}\frac{f'\left(g\left(x_0\right)\right)\varepsilon\left(h\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\delta\left(k\right)}{h} \tag{6}$$

Semplificato h il primo addendo è il limite di una costante, quindi tende a $f'\left(g\left(x_0\right)\right)\cdot g'\left(x_0\right)$. Il secondo addendo invece è una costante moltiplicata per $\frac{\varepsilon(h)}{h}$, che per definizione $\to 0$ quando $h\to 0$. Quindi abbiamo ottenuto:

$$f'\left(g\left(x_0\right)\right)\cdot g'\left(x_0\right)+0+\lim_{h\to 0}\frac{\delta\left(k\right)}{h} \tag{7}$$

Poniamo $\frac{\delta(k)}{h}=\frac{k\cdot\omega(k)}{h}$, ovviamente $\omega\left(k\right)\to 0$ quando $k\to 0$. $\frac{k\cdot\omega(k)}{h}=\frac{g'(x_0)\cdot h+\varepsilon(h)}{h}\cdot\omega\left(k\right)$. Inoltre ci ricordiamo che per $h\to 0$ anche $k\to 0$. Quindi:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\delta\left(k\right)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'\left(x_0\right)\cdot h+\varepsilon\left(h\right)}{h}\cdot\omega\left(k\right)\right]=\lim_{h\to 0}\left[g\left(x_0\right)\cdot\omega\left(k\right)\right]=0 \tag{8}$$

Quindi abbiamo dimostrato che:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(f\circ g\right)\left(x_0+h\right)-\left(f\circ g\right)\left(x_0\right)}{h}=f'\left(g\left(x_0\right)\right)\cdot g'\left(x_0\right) \tag{9}$$

Quindi $f\circ g$ è derivabile in x_0, e la sua derivata vale $\left(f\circ g\right)'=f'\left(g\left(x_0\right)\right)\cdot g'\left(x_0\right)$, che è quanto volevamo dimostrare.

Corollario: Il teorema si può estendere anche a più funzioni, purchè siano rispettate le ipotesi di derivabilità imposte dal teorema. Per esempio, siano f, g, h tre funzioni a valori reali, per cui è definitia, almeno definitivamente, $f\circ g\circ h$, e valga: g continua in x_0, f continua in $g\left(x_0\right)$, h continua in $h\left(f\left(x_0\right)\right)$.

Allora: $\left(f\circ g\circ h\right)'=f'\left(g\left(h\left(x_0\right)\right)\right)\cdot g'\left(h\left(x_0\right)\right)\cdot h'\left(x_0\right)$