Teorema di Lagrange

Alessio Serraino

March 6, 2016

<u>Teorema:</u> (di Lagrange o della media) Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, e derivabile almeno in (a, b).

Allora $\exists c \in (a, b) \colon f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dimostrazione:

Sia $h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$. h è continua in $[a, b]$, quindi soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo $[a, b]$, che ci garantisce che eistono un punto di massimo x_M ($h(x_M) = M$) ed un punto di minimo x_m ($h(x_m) = m$), appartenenti all'intervallo $[a, b]$.

Considero inoltre la derivata di h, $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Se dimostro che esiste un punto c tale per cui $h'(c) = 0$ ottengo $h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, quindi dimostro il teorema. Dimostriamo allora che $\exists c \in (a, b) \colon h'(c) = 0$

Distinguiamo ora due casi:

- $M = m$

In questo caso la funzione è costante, e la derivata di una costante sappiamo essere 0. Quindi $\exists c \in (a, b) \colon h'(c) = 0$, ed il teorema è dimostrato.

- $M > m$

Osserviamo che $h(a) = h(b) = 0$, quindi i punti x_M e x_m non possono essere contemporaneamente entrambi estremi dell'intervallo $[a, b]$, perchè se così fosse si avrebbe che $h(a) = h(b) = h(x_m) = h(x_M)$, e si ricadrebbe nel caso precedente. Quindi almeno uno dei due punti, che chiameremo c, appartiene all'intervalo (a, b). c è un punto stazionario per h, inoltre h è derivabile in (a, b), quindi applichiamo il teorema di Fermat, che ci garanisce che $h'(c) = 0$, quindi il teorema è dimostrato.