Proprietà dell'integrale definito

Alessio Serraino

March 6, 2016

Siano f, g due funzioni integrabili in $[a, b]$. Valgono le seguenti proprietà:

Linearità dell'integrale: $\alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

Dimostrazione:
È una diretta conseguenza della linearità del simbolo di sommatoria.
Consideriamo una qualsiasi somma di Cauchy-Riemann di $\alpha f(x) + \beta g(x)$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} \left(\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)\right) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_i) + \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} g(\xi_i)$$

Facciamo tendere $n \to +\infty$, l'ugualianza sarà conservata anche per i limiti.

Il membro a destra dell'uguale tende a $\alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b f(x)\, dx$, perchè per ipotesi f e g sono integrabili, quindi il limite non dipende da come sono scelti i punti ξ_i. Quindi anche il membro a sinistra dell'uguale non dipende dalla scelta dei punti. Ne segue che $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile, ed il suo integrale vale proprio $\alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b f(x)\, dx$, perchè l'ugualianza continua a valere anche passando al limite.

Additività rispetto all'intervallo di integrazione:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \tag{2}$$

Inoltre per convenzione si pone: (se $a > b$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{3}$$

La dimostrazione di questi fatti non è semplice, ed è piuttosto delicata, pertanto sarà omessa.

Monotonia dell'integrale: Nelle successive formule si suppone $a < b$.

$$f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \implies \int_b^a f(x)\,dx \geq 0 \tag{4}$$

Si osservi che non è vero l'opposto, se l'integrale è positivo è sbagliato concludere che $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$.

$$f(x) \geq g(x)\ \ \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \tag{5}$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{6}$$

Dimostrazione:

Dimostriamo la (4). Consideriamo una qualsiasi somma di Cauchy-Riemann di $f(x)$

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

Ma $f(\xi_i) \geq 0$ comunque scegliamo ξ_i, per ipotesi, la somma di numeri positivi è positiva, moltiplicata per una costante positiva (in quanto si suppone $b > a$) dà un risultato positivo. Quindi $S_n \geq 0\ \forall n$. Per il teorema di permanenza del segno risulta che $\lim_{n\to+\infty} S_n \geq 0$, Ma $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_b^a f(x)\,dx$, per la definizione dell'integrale definito. $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ ovvero la tesi.

Dimostriamo la (5). Sia $h(x) = f(x) - g(x)$, e poichè per ipotesi $f(x) \geq g(x)$ allora $h(x) \geq 0$.

Allora per l'equazione (4) si ha che $\int_a^b h(x)\,dx \geq 0$. Per la linearità dell'integrale definito (equazione (1)) $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$, maggiore o uguale a zero per quanto affermato in precedenza, ovvero riscrivendola si ha: $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$, ovvero la tesi.

<u>**Dimostriamo la 6.**</u> Sia $g(x) = |f(x)|$. Per le proprietà del valore assoluto è sempre vero che: $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq -g(x)$

Quindi, per l'equazione (4) si ha che:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \qquad \int_a^b f(x)\,dx \geq -\int_a^b g(x)\,dx$$

Concatenandole:

$$-\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Quindi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

ovvero la tesi.