

Teorema di unicità del limite

ALESSIO SERRAINO

March 6, 2016

Teorema: (dell'unicità del limite) Sia $\{a_n\}$ una successione. Se ammette limite, tale limite è unico.

Dimostrazione: (lo dimostreremo solo nel caso di limite finito)

Supponiamo che esistano due valori l_1 ed l_2 che verificano entrambi la proprietà del limite, se concluderemo che $l_1 = l_2$ allora il teorema è dimostrato.

Considero $|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| = |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$, perchè se l è un limite di $\{a_n\}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ $|a_n - l| < \varepsilon$ definitivamente. Ripercorrendo la catena di disuguaglianze si ha che $|l_1 - l_2| < 2\varepsilon$, e poichè ε è arbitrariamente piccolo ciò può verificarsi se e solo se $l_1 = l_2$, che è quanto volevamo dimostrare.