Teorema dei valori intermedi

Alessio Serraino

March 6, 2016

Teorema: (dei valori intermedi) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$.

Allora f assume almeno una volta tutti i valori fra il suo massimo ed il suo minimo.

Dimostrazione:

La funzione f rispetta tutte le condizioni del teorema di Weierstrass in $[a,b]$. Ne segue che esistono un punto di massimo x_M per il quale f assume il suo valore massimo ($= M$), ed un punto di minimo x_m per il quale f assume il suo valore minimo ($= m$).

Consideriamo allora λ tale che $m < \lambda < M$, e la funzione $h(x) = f(x) - \lambda$ sull'intervallo $[x_m, x_M]$ (supposto che $x_m > x_M$, in caso contrario la dimostrazione è analoga).

Allora $h\left(x_m\right) = m - \lambda < 0$, $h\left(x_M\right) = M - \lambda > 0$, ovvero h ha valore di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applichiamo allora il teorema degli zeri che ci assicuta che $\exists c \in \left(x_m, x_M\right) \colon h\left(c\right) = 0$, ciò implica che $f\left(c\right) = \lambda$, quindi esiste almeno un punto in cui la funzione vale λ. Poichè questo ragionamento è valido per ogni λ compreso fra il massimo ed il minimo la funzione assume almeno una volta tutti i valori fra il suo massimo ed il suo minimo, come volevamo dimostrare.