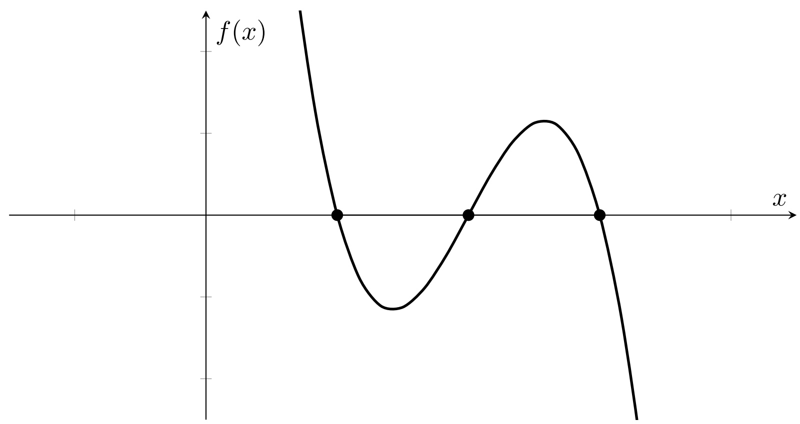
Teorema degli zeri

Alessio Serraino

March 6, 2016



Teorema: (degli zeri) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$.
E sia $f(a) \cdot f(b) < 0$, (ovvero la funzione assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo)
Allora $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$. Inoltre se f è monotona il punto c è unico.

Dimostrazione: (Nel caso particolare $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, l'altro caso si dimostra in modo analogo)
Costruiamo le sequenze $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ come segue:
$a_0 = a$, $b_0 = b$
$c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$

se $f(c_n) > 0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c_n \\ b_{n+1} &= b_n \end{aligned}$$

se $f(c_n) < 0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \\ b_{n+1} &= c_n \end{aligned}$$

altrimenti

siamo fortunati ed il teorema è dimostrato

L'idea è, partendo da $[a, b]$, prendere il suo punto medio e dividere in 2 l'intervallo condiderato, quindi dei 2 nuovi intervalli considerare solo quello che rispetta ancora la condizione $f(a) \cdot f(b) < 0$, e ripetere il processo, finchè uno dei punti medi trovati non è uno zero (ed in quel caso il teorema è dimostrato), oppure si itera all'infinito.

Se non si è trovato nessuno zero abbiamo costruto le sequenze $\{a_n\}$,$\{b_n\}$, con le seguenti proprietà, vere per ogni n:

1. $\{a_n\}$ è *crescente*, $\{b_n\}$ è *decrescente*. È sufficiente guardare come sono state costruite ($a_n \le c_n \le b_n\ \forall n$)

2. $a_n \le b_n$, il che implica che $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono limitate

3. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, perchè dopo ogni iterazione la lunghezza dell'intervallo si dimezza.

4. $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, perchè ogni volta si sceglie l'intervallo con questa proprietà.

Per il teorema di monotonia $a_n \to a \in [a, b]$, $b_n \to b \in [a, b]$ quando $n \to +\infty$. Ma $a_n - b_n \to 0$, quindi, per i teoremi sull'algebra dei limiti $b = a = l$.

Consideriamo ora $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) \cdot f(b_n)$, poichè f è continua il limite vale: $f(a) \cdot f(b) = f(l) \cdot f(l) = f^2(l)$. (si noti che abbiamo usato $a_n \to a$, $b_n \to b$).

Ma la *successione* $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$, quindi per il teorema di permanenza del segno la disuguaglianza si conserva anche passando al limite, tuttavia diventa una disuguaglianza larga, ovvero $f^2(l) \le 0$, la cui unica soluzione è evidentemente $f(l) = 0$. Quindi abbiamo dimostrato che esiste un punto, l, tale per cui la f calcolata in quel punto vale 0. Si noti che $l \in (a, b)$, in quanto si è supposto nelle ipotesi che $f(a) \ne 0$,$f(b) \ne 0$.